ESPACIOS VECTORIALES

ESPACIO VECTORIAL

SUBESPACIO VECTORIAL

MACHOTE

Cuerpo.

Un cuerpo es un conjunto no vacío K en el que se definen dos operaciones: $*$y . , llamadas adición y multiplicación respectivamente, tales que, para todo a, b, c $\in$ K, se cumplen las siguientes propiedades:

i) Cerradura respecto a la adición y a la multiplicación:

$a * b \in K$ y $a . b \in K$.

ii) Asociatividad de la adición y multiplicación:

$$(a * b) * c = a * (b * c) \text{ y } (a . b) . c = a . (b . c)$$

iii) Conmutatividad de la adición y la multiplicación:

$a * b = b * a$ y

$a.b = b.a$.

iv) Existencia de un elemento neutro para la adición y uno para la multiplicación:

Respecto a la adición: $\exists$ e $\in$ K tal que a $*$ e = e$*$a = a; e es el elemento neutro aditivo.

Respecto a la multiplicación: $\exists$ e $\in$ K tal que a **.** e = e **.**a = a; e es el elemento neutro multiplicativo.

v) Existencia de elemento opuesto y de inversos:
Respecto a la adición: $\forall a \in K$, $\exists b \in K$ tal que $a*b = b*a = e$;
donde b se denomina elemento opuesto o simétrico
Respecto a la multiplicación: $\forall a \in K-\{e\}$, $\exists b \in K$ tal que $a.b = b.\ a = e$; b se denomina elemento inverso
vi) Distributividad de la multiplicación respecto de la adición: $a\ .\ (b * c) = (a.\ b) * (a.c)$.

Ejemplos.

i) Los conjuntos N y Z no son cuerpos (ya que carecen de inversos multiplicativos).

ii) Los conjuntos Q, R y C son cuerpos.

Espacio vectorial.

Un espacio vectorial definido sobre un cuerpo de escalares K, es un conjunto no vacío V, provisto de dos operaciones:

i)Una interna, llamada adición, definida por
+: VxV $\rightarrow$V, tal que para todo u, v $\in$V se tiene que (u + v)$\in$V.

ii) Una externa, llamada producto por un escalar, definida por
.: KxV $\rightarrow$V, tal que para to-do $\alpha\in$K y para todo v$\in$V
se tiene que α**.**v$\in$V.

Además para todo u, v, w $\in$ V y para todo α, β $\in$ K
se cumplen las siguientes propiedades:

1. $u + v = v + u$, [conmutativa: suma de vectores].

2. $(u + v) + w = u + (v + w)$, [asociativa: suma de vectores].

3. $\exists\ e \in V$ tal que $u + e = u$, [elemento neutro: suma de vectores].

4. Para cada $u\ \exists\ w \in V$ tal que $u + w = e$,
[elemento inverso u opuesto: suma de vectores].

5. $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$, [distributiva: suma de vectores].

6. $(\alpha + \beta)\,.u = \alpha.u + \beta.u$, [distributiva: suma de escalares].

7. $(\alpha.\ \beta)\,.u = \alpha.(\beta.u)$,[asociativa: multiplicación de escalares].

8. $1.u = u$, [identidad].

En estas condiciones diremos que (V, +, .) es un espacio vectorial sobre el cuerpo K, o también un K-espacio vectorial donde a sus elementos se les denomina vectores y se les denomina vectores ,mientras que a los elementos de K se les llama escalares.

Ejercicio 1.

Probaremos que el conjunto V = R es un espacio vectorial real (sobre el cuerpo K = R), con las operaciones usuales de la adición y multiplicación por un escalar.

Ejercicio 2.

Probaremos que el conjunto V = R^n es un espacio vectorial real (sobre el cuerpo K = R), con las operaciones usuales de la adición y multiplicación por un escalar.

Ejercicio 3.

El conjunto V = $\{(x, y, z) \in R^3 / x + 3y - 2z = 0\}$ es un espacio vectorial (sobre el cuerpo K = R), con la suma y productos usuales.

Ejercicio

¿Cuál de los siguientes conjuntos es un espacio vectorial?

a) V = { (x. y)$\in R^2$, tal que y $\geq$ 0}, junto con las operaciones usuales de la adición y multiplicación por un escalar?

b) W = {(x, y)$\in R^2$ tal que y = 5x – 3 }, junto con las operaciones usuales de la adición y multiplicación por un escalar.

EJEMPLO .- Conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n.

EJEMPLO .- Conjunto de las matrices reales de m filas y n columnas.

$$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} / a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

COMBINACIONES LINEALES

Sea V un espacio vectorial real:

COMBINACIÓN LINEAL.-Decimos que el vector $x \in V$ es combinación lineal de $u_1, u_2, \ldots u_n \in V$ cuando existen α_1, α_2, …, $\alpha_n \in R$ tales que

$$X = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$$

Ejemplos

***1.-El vector** (2,1,1) de R^3 , ¿es combinación lineal de los vectores* **(1,0,0)** *y* **(-1,1,0)** *de R^3 ?*

2.- El polinomio 2 $x^2 + 1$ *de* P_3 *, ¿es combinación lineal de los polinomios* $x^3 + x - 1$ *,* $x - 5$ *y* 1 *de* P_3 *?* .

Definición de dependencia e independencia lineal. Un conjunto finito de vectores $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ del espacio vectorial V es linealmente dependiente (l.d.) si existen k números reales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, no todos nulos, tales que $\alpha_1.\bar{v}_1 + \alpha_2.\bar{v}_2 + \ldots + \alpha_k.\bar{v}_k = \bar{0}$

Es decir, $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ es l.d si: $\alpha_1.\bar{v}_1 + \alpha_2.\bar{v}_2 + \ldots + \alpha_k.\bar{v}_k = \bar{0} \Rightarrow$ Existe al menos un $\alpha_i \neq 0$.

Por el contrario, si $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ no es linealmente dependiente, se dice que es un conjunto linealmente independiente (l.i.)

Es decir, $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ es l.i. si $\alpha_1.\bar{v}_1 + \alpha_2.\bar{v}_2 + \ldots + \alpha_k.\bar{v}_k = \bar{0} \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i = 1, 2, \ldots, k$

Observaciones:

1) Afirmamos que dos vectores en R^2 son linealmente dependientes si y solo si son colineales o proporcionales o paralelos.

2) Mientras que en R^3 afirmamos que tres vectores son linealmente dependientes si y solo si ellos son coplanares o proporcionales.

3) Una consecuencia inmediata de la definición, es que cualquier conjunto de vectores que contenga al elemento neutro es linealmente dependiente.

4) Si en R^n se tiene que un vector es múltiplo escalar de otro, entonces se afirma que los vectores son linealmente dependientes.

Propiedad Fundamental:

Un conjunto de vectores es linealmente dependiente si y solo si podemos expresar uno de los vectores del conjunto como combinación lineal del resto.

SUBESPACIOS VECTORIALES

Algunos subconjuntos de un espacio vectorial V diferentes del vacío, son a su vez espacios vectoriales con las operaciones definidas en V.

Estos subconjuntos se denominan subespacios vectoriales.

Definición.

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sea U un subconjunto no vacío de V. Decimos que U es un subespacio vectorial de V, **si U es en sí mismo un espacio vectorial** (sobre el mismo cuerpo K), con las mismas operaciones de V.

De esta definición se sigue que el conjunto U es cerrado respecto a las operaciones mencionadas, dando origen por lo tanto a la siguiente propiedad:

Propiedad fundamental.

Sea V un espacio vectorial y sea $\varnothing \neq U \subseteq V$.

Afirmamos que U es un subespacio vectorial

de V si y solo si las operaciones adición y producto

por un escalar están bien definidas;

es decir, si y solo si para todo $u; v \in U$ y

$r \in K$ se tiene: $(r\,u + v) \in U$.

Ejemplos:

El conjunto $R_{xz} = \{(x, y, z) \in R^3 / y = 0\}$ es un subespacio de R^3, geométricamente representa un plano que pasa por el origen de coordenadas y está determinado por los vectores (1, 0, 0) y (0, 0, 1)

.

Veamos la demostración:

Para todo $(x_1, 0, z_1)$, $(x_2, 0, z_2)$ de R_{xz} y $\alpha \in K = R$ se tiene que:

$$\alpha(x_1, 0, z_1) + (x_2, 0, z_2) = (\alpha x_1 + x_2, 0, \alpha z_1 + z_2) \in R_{xz}$$

ya que $\alpha x_1 + x_2 \in R$, $\alpha z_1 + z_2 \in R$

OBSERVACIONES

a) Todo subespacio vectorial, contiene al vector neutro aditivo.

b)Todo espacio vectorial V tiene al menos dos subespacios vectoriales U=V y U={0}, estos dos subespacios se conocen como **subespacios impropios** mientras que el resto de subespacios intermedios se llaman subespacios propios.

c) El conjunto S de soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones lineales AX= 0 donde A es una matriz de orden mxn, con coeficientes en el cuerpo K, es un subespacio vectorial del espacio K^n En este caso al sistema AX=0 se le llama sistema de ecuaciones cartesianas del subespacio.

d) En conclusión, los subespacios vectoriales de R^n son subconjuntos de R^n que quedan caracterizados mediante un sistema de n ecuaciones lineales homogéneo AX = 0.

Ejemplos:

1. Algunos subespacios notables del espacio

vectorial R^3, se deducen como sigue:

a)Dado un vector v ϵ R^3 ,los vectores linealmente

dependientes con éste vector son de la forma t**v** donde

t ϵ **R** ,de donde concluimos que el conjunto

$$L = \{P/P = t\mathbf{v}: t \in \mathbf{R}\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$.

Geométricamente L representa la ecuación vectorial de

una recta que pasa por el origen.

b) Dados dos vectores linealmente independientes **u** y **v** $\in$ $\mathbf{R}^3$

Se tiene que los vectores linealmente dependientes con ellos dos, son de la forma : r**u** + s**v** donde r y s $\in$ **R** , se demuestra que

$\mathcal{P}$ ={P / P= r**u** + s**v**: t $\in$ **R** } es un subespacio de $\mathbf{R}^3$

Geométricamente $\mathcal{P}$ representa la ecuación vectorial de un plano que pasa por el origen de coordenadas determinado por los vectores **u** y **v**.

Ejercicio

Dados los vectores del espacio R^4 :

(1,-1,2,-1), (2,-1,2,0), (3,0,-3,1)

Determinar si son linealmente dependientes o independientes.

Problema 2: Determinar si el siguiente conjunto de vectores de R^3:

$$A = \{(-1,0,2),(0,-4,2),(2,0,-4)\}$$

es linealmente dependiente o independiente.

Problema 3: Determinar si el siguiente conjunto de vectores de R^3:

$$B = \{(1,0,-2),(-4,2,0),(0,2,-4)\}$$

es linealmente dependiente o independiente.

Problema 4: Para el conjunto: $A = \{(k-5)x^2 + x, 2x^2 - 2x + 3, 2x^2 + 3x - 3\}$

Obtener el valor de $k \in R$, tal que "A" sea linealmente dependiente.

Problema 5: Sea $A = \{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ un conjunto de vectores linealmente independiente de un espacio vectorial "V". Determinar si el conjunto de vectores $B = \{\overline{u} - 2\overline{v} + \overline{w}, \overline{u} + \overline{v}, \overline{u} - \overline{v}\}$ es linealmente dependiente o independiente.

Teorema. Si el rango de una matriz A de orden mxn es r, entonces existe por lo menos un conjunto de r líneas linealmente independientes de A y toda línea puede escribirse como una combinación lineal de cualquier conjunto tal.

COROLARIO. En una matriz A Є M_{nxn} y rango n-1, los cofactores de los elementos de cualquiera dos líneas paralelas son proporcionales.

ESPACIO GENERADO

Sea V un espacio vectorial, y $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$,$\mathbf{v}_k$ vectores de V. El conjunto formado por todas las posibles combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$,$\mathbf{v}_k$ se llama el *espacio generado* por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$,$\mathbf{v}_k$. Este conjunto se representa por

$$\text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$$

Si $V = \text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ diremos que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ genera a V y que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un *conjunto generador* de V.

EJEMPLO

Indique si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

pertenece al espacio generado por las matrices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

BASE-DIMENSIÓN FINITA

Se dice que los vectores $a_1, a_2 \ldots a_n$ de V son una base de V si:

1) generan a V

2) son linealmente independientes.

Se dice que un espacio vectorial V es de dimensión finita si tiene una base con un número finito de vectores.

Observaciones

a) **Que el conjunto B sea un sistema generador significa que cualquier vector de V se puede expresar como una combinación lineal en términos de los vectores que conforman la base**

b) **Las bases de un espacio vectorial no son únicas, y como un mismo espacio tiene muchas bases, habrá muchas representaciones para un mismo vector; una en cada base.**

TEOREMA FUNDAMENTAL

TEOREMA:

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, entonces dos bases cualesquiera de dicho espacio vectorial tienen el mismo número de vectores.

DIMENSIÓN

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita,

se dice que la dimensión de V es n (y escribimos dim(V) = n) si toda base de V tiene n vectores.

Ejemplos:

1.-dim(M_{2x2}) = 4, ¿por qué?

2.-dim(P_3) = 4, , ¿por qué?

P_3 **:es el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3.**

SISTEMA GENERADOR

Sistema de generadores o sistema generador. Definición. Un subconjunto S de V se denomina sistema de generadores de V si L(S) = V.

Comentario. La expresión $L(S) = V$, se interpreta afirmando que todo vector $\bar{v} \in V$ se pue-de expresar como una combinación lineal de los vectores que conforman S.

Comentarios:

i) Finalmente concluimos que en un espacio vectorial de dimensión n, a lo más hay n vectores linealmente independientes.

ii) En lo sucesivo, salvo que se indique lo contrario, trabajaremos con espacios vectoriales de dimensión finita.

Propiedad .

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea U $\subseteq$ V un subespacio de V, entonces se tiene:

i) $\dim(U) \leq \dim(V)$.

ii) $\dim(U) = \dim(V)$ si y solo si $U = V$

Teorema fundamental. Si V es un espacio vectorial y B una base cualquiera de V. Un conjunto de k vectores $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, ..., \bar{v}_k\}$ es linealmente independiente si y solo si la matriz cuyas columnas (o cuyas filas) son las coordenadas (componentes) de cada uno de estos vectores en la base B, tiene rango k.

Observación:

Por convención tenemos que la dimensión del espacio nulo es cero y su base es el conjunto vacio; es decir:

Si la base $B = \{\ \} = \phi$, entonces $L(B) = L(\phi) = \{\bar{0}\}$, con lo cual $\dim\{\bar{0}\} = 0$.

Ejemplos:

A continuación describiremos las bases más sencillas (las canónicas o estándar) de algunos espacios vectoriales,

a) Para el espacio vectorial real R^n, la base canónica está dada por los n vectores

$$B = \{\bar{e}_1 = (1;0;\ldots;0); \bar{e}_2 = (0;1;\ldots;0); \ldots; \bar{e}_n = (0;0;\ldots;1)\}.$$

b) Otra base para el espacio vectorial real R^3 distinta de la canónica, esta dada por los vectores :
{ (2,0,0), (3,3,0), (0,2,-3)}.

Ejercicio 1:

Determinar un conjunto de vectores linealmente independientes, generadores del espacio vectorial R^3, siendo uno de tales vectores (1, -1, 1).

Ejercicio 2:

Dado el conjunto de vectores: $\{(1,-2, a,3); (1,2,3,-2); (-1,3,-3,0); (-1,0,1,0)\}$, determinar el valor de a de modo que dicho conjunto sea una base de R^4.

Representación de un mismo vector en diferentes bases. Coordenadas.

La existencia de diferentes bases en un mismo espacio vectorial nos da la posibilidad de estudiarlas, cualquiera que sea el conjunto V, como si fuera R^n (sobre el cuerpo K = R o K= C).

¿Cómo realizamos este estudio?

Para esto sabemos que dada una base ordenada de un espacio vectorial de dimensión finita n, entonces cualquier vector del espacio se puede expresar en términos de la base, de manera única, basta con expresar el vector como una combinación lineal de los elementos de la base; de donde los coeficientes de la combinación lineal recibirán el nombre de coordenadas o componentes del vector en la base dada; es decir:

Si cada vector $\bar{v} \in V$, se expresa de manera única en la base B como: $\bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{v}$

entonces se dice que $\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n$ son las coordenadas o componentes de $\bar{v}$ en la base B; lo

se representa por : $\bar{v}_B = (\alpha_1, \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$

Ejemplo:

El vector a=(2.-3) expresarlo en las bases:

$$B_1 = \{\overline{a} = (-1;2); \overline{b} = (2;4)\}$$

$$B_2 = \{\overline{a} = (-1;0); \overline{b} = (1;4)\}$$

Respectivamente.

OPERACIONES CON SUBESPACIOS VECTORIALES

Intersección de subespacios. Teorema. Dado dos subespacios vectoriales U y W de V, sobre un cuerpo K, la intersección de ellos es un subespacio vectorial contenido en estos y lo denotaremos como: $U \cap W = \{\bar{a} / \bar{a} \in U \text{ y } \bar{a} \in W\}$

Demostración

$$\text{Para todo } \bar{u} \text{ y } \bar{v} \in U \cap W,\ r \in K \text{ se tiene}: \begin{cases} \bar{u} \text{ y } \bar{v} \in U \Rightarrow r\bar{u} + \bar{v} \in U \\ \bar{u} \text{ y } \bar{v} \in W \Rightarrow r\bar{u} + \bar{v} \in W \end{cases} \Rightarrow r\bar{u} + \bar{v} \in U \cap W$$

Ejemplo.

Sabemos que los siguientes conjuntos son subespacios de R^3: $U = \{(x, y, z) \in R^3 / \; x - y = 0\}$,

$W = \{(x, y, z) \in R^3 \, / \, 3x - y + 2z = 0\}$.

Luego tenemos que la intersección de ellos: $U \cap W = \{(x, y, z) \in R^3 / \, x - y = 0; \, 3x - y + 2z = 0\}$

es también un subespacio vectorial de R^3.

¿Cuál es este subespacio?

La respuesta viene por la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{f_2 - 3f_1}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = E_a$$

Como $r(E_a) = r(A) = 2 < 3 =$ N° de variables; entonces hay una variable libre y por lo tanto habran muchas soluciones.

Continuamos resolviendo el sistema: $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = t \Rightarrow y = -t/2 = x$

La solución será: $\{(x, y, z)\} = \{(-t/2, -t/2, t);\ t \in R\} = \{t(-1/2, -1/2, 1);\ t \in R\} = \{r(-1, -1, 2);\ r \in R\}$.

Es decir, se tiene: $U \cap W = \{r(-1, -1, 2),\ r \in R\}$, él cual es un subespacio vectorial de R^3; geometricamente representa la ecuación vectorial de una recta que pasa por el origen de coordenadas. y que sigue la dirección del vector (-1, -1, 2).

Comentarios.

a) La intersección sucesiva de espacios vectoriales se realiza inductivamente, tomando los espacios de dos en dos.

b) Podemos concluir que $U \cap W$ es el mayor subespacio vectorial de V contenido en U y en W

Suma de subespacios. Sean U y W dos subespacios del espacio vectorial V, definimos la suma de U y W como : $U + W = \{\bar{u} + \bar{w} / \bar{u} \in U, \ \bar{w} \in W\}$.

OBSERVACIONES:

i) La suma de subespacios está dada por los posibles sumas de vectores de U con los de W , luego $U+W = < U \cup W >$

ii) Se tiene que U+W es elo menor subespacio que incluye tanto a U como a W, como también $U \cup W$.

Teorema. Si U y W son dos subespacios del espacio V, su suma también lo es.

Demostración:

Como $U+W=\{\bar{u}+\bar{w}/\bar{u}\in U,\ \bar{w}\in W\}$ tenemos que para $\bar{a}$ y $\bar{b}$ pertenecientes a $U+W$:

$\bar{a}=\bar{u}_1+\bar{w}_1$, con $\bar{u}_1\in U$ y $\bar{w}_1\in W$; y $\bar{b}=\bar{u}_2+\bar{w}_2$, con $\bar{u}_2\in U$ y $\bar{w}_2\in W$

Luego para cada $\alpha\in K$ se tiene:

$$\alpha\bar{a}+\bar{b}=\alpha(\bar{u}_1+\bar{w}_1)+(\bar{u}_2+\bar{w}_2)=\alpha\bar{u}_1+\alpha\bar{w}_1+\bar{u}_2+\bar{w}_2=(\alpha\bar{u}_1+\bar{u}_2)+(\alpha\bar{w}_1+\bar{w}_2)\in U+W;$$

ya que $(\alpha\bar{u}_1+\bar{u}_2)\in U$ y $(\alpha\bar{w}_1+\bar{w}_2)\in W$ por ser ambos subespacios.

Luego U + W es un subespacio de V

. **Propiedades fundamentales.** Sean U y W subespacios vectoriales del espacio V; entonces:

i) $U + W = W + U$

ii) $U + U = U$

iii) $U \subset (U + W)$

iv) Si V tiene dimensión finita: $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

Suma directa de subespacios. Definición. Sean U y W dos subespacios del espacio vectorial V, la suma directa de U y W denotada por U⊕W, se define como:

$$U \oplus W = U + W, \text{con la condición } U \cap W = \{\bar{0}\}.$$

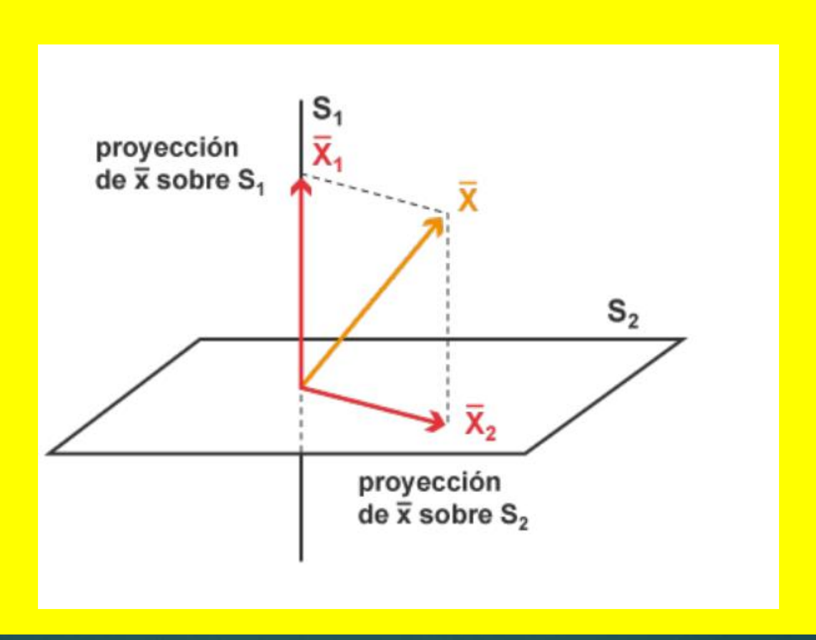
Definición. Sean U y W subespacios del espacio vectorial V, se afirma que V es la suma directa de los subespacios U y W, si ocurre que $U \oplus W = V$

OBSERVACIONES

a) Si V es la suma directa de U y W, entonces se cumple: $V = U + W$ y $U \cap W = \{\overline{0}\}$

b) La última definición nos indica que todo vector de V se escribe de manera única como la suma de un vector en U más otro vector en W; es decir:

Para todo $\overline{v} \in V$ se tiene: $V = U \oplus W \Leftrightarrow \overline{v} = \overline{u} + \overline{w}$ de manera única, donde $\overline{u} \in U$ y $\overline{w} \in W$, siendo $\overline{u}$ la proyección de $\overline{v}$ sobre U y $\overline{w}$ la proyeccion de $\overline{v}$ sobre W.



c) Todo subespacio U de dimensión k de un espacio vectorial V de dimensión n, tiene al menos un subespacio suplementario W de V, de dimensión (n – k).

. Propiedades fundamentales.

i) Como $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$; tendremos que si $U \cap W = \{\bar{0}\}$,

entonces $\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$.

ii) Ahora, si $V = U \oplus W$, entonces se tiene $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$

Ejercicio .

Como $R_{xy} = \{(x, y, z) \in R^3 / z = 0\} = L\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ es un subespacio de R^3; de dimensión 2, y $L_z = \{(x, y, z) \in R^3 / x = y = 0\} = L\{(0, 0, 1)\}$ es otro subespacio de R^3 de dimensión 1,(geométricamente representa una recta); entonces la suma directa de estos subespacios está dada por: $R^3 = R_{xy} \oplus L_z = L\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, donde además

$R_{xy} \cap L_z = \{(0, 0, 0)\}$

Veremos a continuación otra manera de calcular la suma directa de subespacios.

Calculo de la suma de los subespacios: $R_{xy}+L_z$.

Es inmediato que $R_{xy} = L\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, ya que todo elemento de R_{xy} se expresa como combinación lineal de (1, 0, 0) y (0, 1, 0), tal como se comprueba:

$$\bar{a} = (x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0)$$

De igual modo $L_z = L\{(0, 0, 1)\}$

Luego tenemos que $R_{xy}+L_z = L\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} = R^3$.

Es decir la suma $R_{xy}+L_z$ resulta el espacio vectorial R^3

Calculo de $R_{xy} \cap L_z$

$$\text{Para todo } \bar{a} \in R_{xy} \cap L_z; \text{ se tiene: } \begin{cases} \bar{a} \in R_{xy} \Rightarrow \bar{a} = (a_1, a_2, 0) \\ \bar{a} \in L_z \Rightarrow \bar{a} = (0, 0, a_3) \end{cases} \Rightarrow \bar{a} = (a_1, a_2, 0) = (0, 0, a_3) \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

Luego concluimos que $\bar{a} = (0,0,0)$, con lo cual $R_{xy} \cap L_z = \{(0,0,0)\}$

Ejercicio:

Calcular bases para los subespacios siguientes

S, T, $S + T$; $S \cap T$, $S \oplus T$; respecto de R^3, donde

$S = \{(x, y, z) \in R^3 / \ x = z\}$;

$T = <(1, 0, 0); (2, -1, 0)>$.

Resolución:

a) Hallando una base para S:

S= {(x, y, z) donde x = z} $\Rightarrow$ (x, y, x) = ((x, 0, x) +

(0, y, 0) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0)

Un vector de S es generado por los vectores (1, 0, 1); (0, 1, 0) que son LI; luego afirmamos que una base para S es
B_S = {(1, 0, 1); (0, 1, 0)}, siendo además dim(S) = 2

Determinamos una base para T:

Como el subespacio T esta generado por

(1, 0, 0); (2, -1, 0),que son LI ; entonces una base

para T está dada por:

Como el subespacio T esta generado por

(1, 0, 0); (2, -1, 0),que son LI ; entonces una base

para T está dada por:

B_T = {(1, 0, 0); (2, -1, 0)}, siendo su dimensión 2.

Calculando una base para S + T:

Tenemos que S + T = Gen $\{B_S \cup B_T\}$=

Gen{(1, 0, 1); (0, 1, 0), (1, 0, 0); (2, -1, 0)}.

Pero tener en cuenta , que el conjunto generador será linealmente dependiente; luego procederemos a eliminar los elementos dependientes.

¿Cuántos de los vectores {(1, 0, 1); (0, 1, 0), (1, 0, 0); (2, -1, 0)}.serán linealmente independientes?

a(1, 0, 1)+ b(0, 1, 0)+ c(1, 0, 0)+ d(2, -1, 0) = (0, 0, 0), de donde:

$$\begin{cases} a + c + 2d = 0 \\ b - d = 0 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow A_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3 - f_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} = E_a$$

Como $r(E_a) = r(A) = 3 < 4$ = N° de variables, tenemos que hay una variable libre, por lo tanto muchas soluciones, en consecuencia los vectores son dependientes

$$\begin{cases} a + c + 2d = 0 \\ b - d = 0 \\ -c - 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow d = t \Rightarrow c = -2t \Rightarrow b = t \Rightarrow a = 0$$

La combinación lineal nos queda: 0.(1, 0, 1)+ t(0, 1, 0)-2t(1, 0, 0)+ t(2, -1, 0) = (0, 0, 0), de donde: (0, 1, 0) - 2(1, 0, 0) + (2, -1, 0) = (0, 0, 0).

De aca observamos que uno cualquiera de los 3 vectores es combinación lineal de los otros 2; asi por ejemplo (2, -1, 0) = 2(1, 0, 0) – (0, 1, 0)).

Luego afirmamos que S + T esta generado por: {(1, 0, 1); (0, 1, 0), (1, 0, 0)}; es decir:

S+T=L {(1, 0, 1); (0, 1, 0), (1, 0, 0)} = {x(1, 0, 1) + y(0,1, 0) + z(1, 0, 0)} = {(x+z, y, x)$\in R^3$}.

Una base de S + T por B_{S+T} = {(1, 0, 1); (0, 1, 0), (1, 0, 0)}, lo cual nos indica que la dimensión de (S + T) es 3.

Una base de S + T por B_{S+T} = {(1, 0, 1); (0, 1, 0), (1, 0, 0)}, lo cual nos indica que la dimensión de (S + T) es 3.

Calculando una base para S $\cap$T:

$$\bar{a} \in S \cap T \Rightarrow \begin{cases} \bar{a} \in S \Rightarrow \bar{a} = (a_1, a_2, a_1) \\ \bar{a} \in T \Rightarrow \bar{a} = \alpha(1,0,0) + \beta(2,-1,0) \end{cases} \Rightarrow \alpha = -2\beta;\; a_2 = -\beta;\; a_1 = 0$$

Luego $\bar{a} = (a_1, a_2, a_1) = (0, -\beta, 0) = \beta(0, -1, 0)$

Finalmente una base para el subespacio S$\cap$T está dada por $B_{S\cap T}$ = {(0, -1, 0)}, de donde afirmamos que S$\cap$T =L{(0, -1, 0)} = {a(0, -1, 0), a$\in$R} = {(0, -a, 0)} siendo su dimensión 1.

Además dim(S + T) = dim(S) + dim(T) – dim(S$\cap$T) = 2 + 2 – 1 = 3 = dim(R^3).

Tambien tenemos que como S$\cap$T $\neq$ (0,0, 0), entoncrs no existe S$\oplus$T.

Espacio vectorial Euclideo

A continuación procederemos a construir un conjunto de nuevas definiciones provenientes de la geometría euclidea, tales como normas, distancia, ortogonalidad, ángulos, áreas; dentro de los espacios vectoriales, para lo cual será necesario definir una nueva operación entre vectores a la cual llamaremos producto interno.

Producto escalar

Definición. Dado un espacio vectorial $V = R^n$ sobre el cuerpo K (K = R o K = C), el producto interno se define como una función

$<, >: R^n \times R^n \rightarrow R$ tal que:

$$<\bar{a};\bar{b}> = <(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)> = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + +x_ny_n$$

Este producto interno, así definido, se denomina **producto escalar**; siendo el **producto interno canónico o estándar** del espacio vectorial R^n, denotándose por:

$$<\bar{a};\bar{b}> = \bar{a}.\bar{b} = <(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)> = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + +x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Propiedades fundamentales.

Si 0, u y v son elementos del espacio vectorial V y k es un escalar ($k \in K$) se cumple:

i) $<0; u> = 0$.

ii) $<u; v + w> = < u; v > + < u; w >$

iii) $< u; kv > = k<u; v >, k \in K$

Espacio vectorial euclideo R^n. Definición. Si al espacio vectorial R^n, se le asocia el producto interno $\bar{a} \cdot \bar{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, entonces se obtiene el llamado espacio vectorial euclideo n-dimensional R^n.

Observación.-

La importancia de este espacio vectorial euclídeo R^n radica en que en él se pueden emplear los conceptos de la geometría euclídea tradicional, tales como: módulos, ángulos, ortogonalidad, áreas; etc.

Espacios afines

La aparición de otras geometrías diferentes a la euclidiana, trajo consigo la noción de espacio afín con el objetivo en un inicio de revisar los conceptos de longitud, norma, ángulo, etc.; configurándose así la noción de espacio con una estructura próxima a la de un espacio

Definición. Sea E un conjunto no vacío. Afirmamos que E es un espacio afín asociado al espacio vectorial V, si existe una aplicación f: ExE $\rightarrow$ V tal que a cada par de puntos (P,Q) de ExE se le hace corresponder un único vector **v** de V tal

que $\bar{v} = \overrightarrow{PQ}$; $[f((P;Q))] = \bar{v} = \overrightarrow{PQ}$], que verificA :

i) Para todo $P \in E$ y $\bar{v} \in V$, existe un único $Q \in E$ tal que $f((P,Q)) = \bar{v} = \overrightarrow{PQ}$.

ii) Para todo P,Q y $R \in E$ se cumple : $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.. (Ley de Chasles)

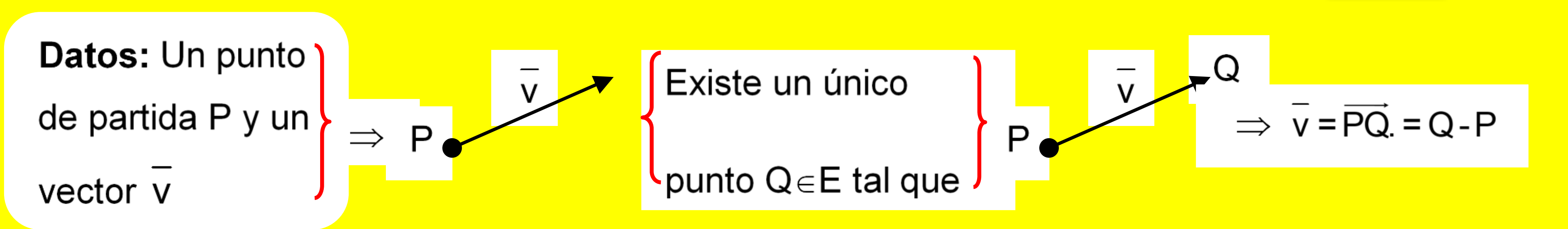
Observaciones:

a) A los elementos del espacio afín E los llamaremos puntos, mientras que los elementos de V se llaman vectores; siendo V el espacio vectorial asociado al espacio afín E.

Si el espacio vectorial V es euclideo, entonces al espacio afín E se le denomina **espacio afín euclideo**.

b) Según la definición, la aplicación f nos indica que a cada par de puntos P y Q de E le corresponde el vector $\overrightarrow{PQ}$; es decir : $f((P,Q)) = \overrightarrow{PQ}$

c) Según lo anterior, se tiene que dados un punto $P \in E$ y un vector $\bar{v} \in V$, existe un único $Q \in E$ tal que $\bar{v} = \overrightarrow{PQ}$, con lo cual el punto Q queda definido por $Q - P = \bar{v} = \overrightarrow{PQ}$.



d) En cualquier caso se tiene que la dimensión del espacio afin E, es la misma que la dimension del espacio vectorial V; es decir: dim (E) = dim(V).

Conclusión. Podemos resumir afirmando que en espacio afín es un conjunto de puntos, al cual se le asocia un espacio vectorial V mediante una aplicación f.

Lo que permite trabajar los problemas de la geometría analítica, donde se trabajan con puntos, mediante la aplicación de vectores.

Ejemplos.

1. Si al espacio vectorial V lo consideramos com un conjunto de puntos,, en cuyo caso E = V, tendremos que el propio conjunto de puntos E = V es un espacio afín asociado al mismo conjunto V (pero considerado como espacio vectorial).

2. Según lo anterior, tenemos que $E = R^n$, en general, es un espacio afin de dimensión n asociado al propio espacio vectorial $V = R^n$

Propiedades fundamentales. Para todos los puntos P; Q; R y S$\in$E, se tiene:

$$\textbf{i)}\ \overrightarrow{PQ} = \overline{0} \Leftrightarrow P = Q..$$

$$\textbf{ii)}\ \overrightarrow{PQ} = -\overline{QP}.$$

$$\textbf{iii)}\ \overrightarrow{PQ} = Q - P \Leftrightarrow Q = P + \overline{PQ}.$$

$$\textbf{iv)}\ \overrightarrow{PQ} = \overline{RS} \Leftrightarrow \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}.$$